Шифр: 10-20

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
математика
2019/2020
Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа МОУ „Лицей №1" г. Всеволожска

Класс 10

ФИО Смородский Артём
Сергеевич

10.1

10-20

Разложим 3990 на простые множители. Сделав это, мы получим, что $3990 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Так как 19 - простое число, то его нельзя получить как произведение цифр. Значит, 19 - это сумма цифр, а произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ - произведение цифр четырёхзначного числа. Однако, если ~~если взять~~ предположить, что цифрами четырёхзначного числа являются цифры 2; 3; 5; 7, то число, состоящее из этих цифр, нас не устроит, потому что сумма цифр этого числа будет равна $2+3+5+7=17$. Но, если заменить в данном числе цифры 2 и 3 на цифры 1 и 6, то произведение цифр не изменится, а сумма будет равна 19.

Возьмём, к примеру, число 1567. Его сумма цифр будет равна $1+5+6+7=19$, а произведение цифр будет равно $1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$. Если перемножить сумму цифр числа на произведение цифр этого числа, то получим $19 \cdot 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 3990$.

Ответ: 1567.

1	2	3	4	5	
7	7	0	0	0	14

10.2.

10-20

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — элементы множества A, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ — элементы множества B. Тогда по условию $a_1+a_2+\dots+a_n=n^2$ и $b_1+b_2+\dots+b_n$

Предположим, что не найдётся числа, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B. Тогда элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ различны между собой. Если сложить элементы из множества A и элементы из множества B, то получим, что $a_1+a_2+\dots+a_n+b_1+b_2+\dots+b_n=n^2+n^2=2n^2$. Значит, мы получим, что $2n^2$ можно представить в виде $2n$ различных натуральных чисел. ~~Но если мы возьмём 2n~~ Возьмём наименьшую сумму, которая могла получиться из $2n$ различных натуральных чисел. Эта сумма будет равна $1+2+\dots+2n$. Однако Эта сумма будет равна $1+2+\dots+2n=\frac{2n\cdot(2n+1)}{2}=\frac{4n^2+2n}{2}=2n^2+n$. Видно, что ~~$2n^2+n$~~ $2n^2+n>2n^2$. Значит, если мы возьмём самую маленькую сумму из $2n$ различных натуральных чисел, то получим сумму, большую чем $2n^2$. А это значит, что $2n^2$ нельзя представить в виде суммы $2n$ различных натуральных чисел. Значит мы получили противоречие, и найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B (потому что в множестве A различные элементы и в множестве B различные элементы по условию), что и требовалось доказать.

Чистовик

№ 10.4

~~Т.к. $y < \frac{p}{2}$~~

Пусть $y = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ — простые числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — показатели степени. Т.к. $y < \frac{p}{2}$, то $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n} < \frac{p}{2}$, значит, $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n} < \left(\frac{p}{2}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{\alpha_n} = \left(\frac{p}{2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$, значит, $py+1 < \left(\frac{p}{2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\cdot p+1$. Также т.к. $y < \frac{p}{2}$, то $py+1 < \frac{p^2}{2}+1$. Известно также, что любое простое число, ~~прес~~ большее 5, представимо в виде $6k+1$ и $6k-1$, где k — произвольное натуральное число. Также известно, что $6k+1$ задаёт бесконечное множество простых чисел. Значит, если y представить, как $6f$, где f — то самое k, ~~которое~~ при кот. мы получим простое число из $6k+1$, то ~~его можно~~ y можно представить только как $1\cdot y$. Тогда условие будет выполнятся.

№ 10.3.

Раскрасим доску в шахматный цвет.

Если ходит Дима, то ~~зачер~~ уменьш. кол-во чёр. и б. кл-ок на 1. Если ходит Коля, то уменьш. кол-во чёр на 1, либо кол-во бел. на 1. Победит Коля, т.к. если все ходы заставят, то последним попадет Коля.

№10.8 (продолжение)

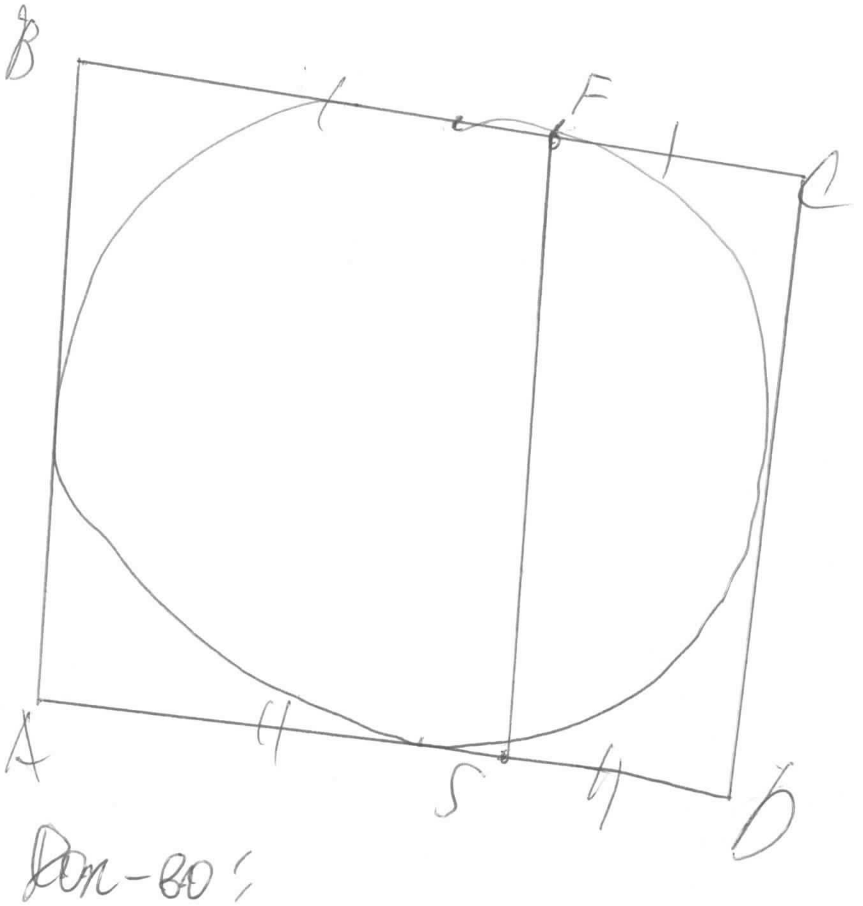
Выигрышная стратегия Коли - ходить по диагонали. Тогда рано или поздно не останется ходов у Димы и Коля начнет заполнять пространство между диагоналями. ~~Т.к.~~

	X
X	X

Тогда Дима закрасит одну из них, и у Коли останется один крестик и так далее, пока у Димы не останется ходов и Коля победит.

Ответ: победит Коля.

№10.5.



Док-во:

Т.к. ~~FS - отрезок~~ $AF = FC$ и $AS = SD$, то

$SF \parallel AB$ и $FS \parallel CD$.

Шифр: 2-10-02

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
математика
2019/2020
Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа МОУ „Лицей № 1" г. Всеволожска

Класс 10

ФИО Смородский Артём Сергеевич

2 - 10 - 02

6	7	8	9	10	Σ
7	1	3	0	0	11

№ 10.6

Изначально на доске написано ~~только~~ выражение $\cos x$. Перемножим $\cos x$ два раза и запишем на доску $\cos^2 x$. Теперь сложим $\cos x$ и $\cos^2 x$ и запишем на доску новое выражение $\cos x + \cos^2 x$. При $x = \pi$ данное выражение будет равняться $\cos\pi + \cos^2\pi = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$. Значит, за несколько действий можно получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0.
Ответ: можно.

+

№ 10.8.

Рассмотрим квадратный трёхчлен вида $ax^2 + bx + c$. Так как корни целые, ~~то $x_1 +$~~ то по теореме Виета $b \vdots a$ и $c \vdots a$. Это значит, что если ~~найдутся такие~~ можно сделать таким образом n квадратных трёхчленов, то мы должны разбить $3n$ последовательных натуральных чисел на n троек чисел так, что два наибольших числа в этой тройке делятся на наименьшее число в этой тройке. Но для этого нужно, чтобы ряд чисел начинался с 1, иначе ~~а~~ не найдется делителя для каждого числа. Но от 100 $3n$ ~~в~~стречается много простых чисел, у которых делитель ~~от~~только 1 и сам. не. Значит, мы не можем разбить на тройки числа, а это значит, что нельзя разложить.

чисел, кроме 1.

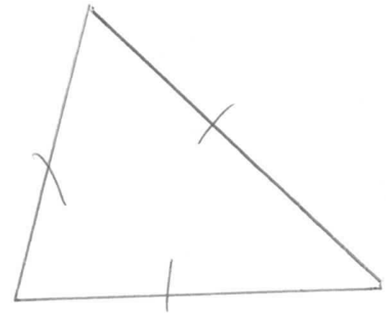
№ 10.9. 2-10-02

Ответ: нельзя.

Доказательство:

Докажем данное утверждение по индукции:

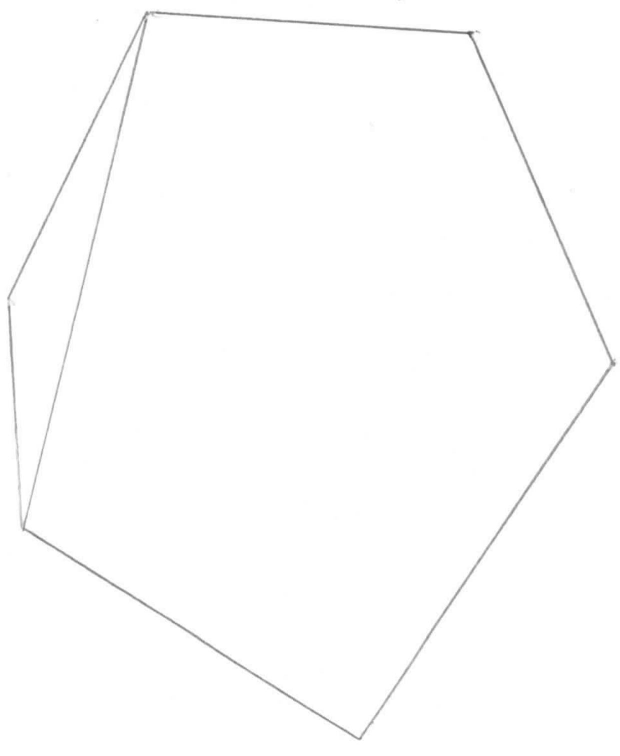
База: $n=3$:



Здесь мы видим, что условие не выполняется.

Переход: Предположим, что нельзя разрезать n-угольник (правильный) ни на один хороший многоугольник.

Рассмотрим случай для многоугольника $n+1$:



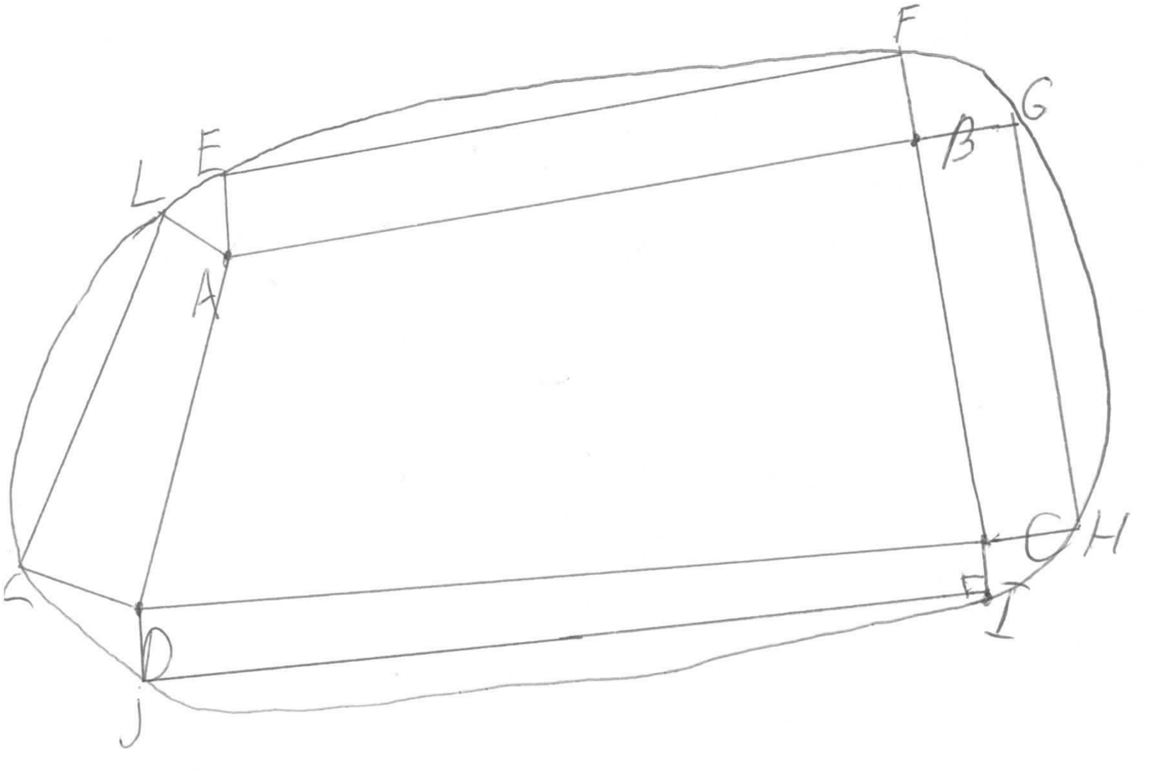
Проведя диагональ, мы разбили мно-к на 2 меньших многоугольника, для которых условие выполняется.

Ответ: нельзя.

№10.10.

Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$, а $g(x)=dx^2+ex+f$, тогда ~~тут~~ загадываем Пете 0. Он скажет нам либо c, либо f. После этого загадываем Пете 1, после чего он скажет нам либо $a+b+c$, либо $d+e+f$. ~~Отсюда мы узнаем, чему равно либо $a+b$, либо $d+e$.~~

№10.7.



~~Д~~Док-во:

Т.к. $KDAL$; $AEFB$; $BGHC$; $CIJD$ – прямоугольники, то, $AL=KD$; $AE=BF$; $BG=CH$; $CI=DJ$. Значит, если мы будем уменьшать отрезки выше перечисленные все одновременно на одно и то же расстояние, то мы будем получать прямоугольники, которые всё равно будут подобны изнач...

№10.4 (продолжение).

Потому что равные отрезки, уменьшаясь на одну и ту же длину, будут равными, а углы $\angle AE$; FBG; HCI; KDJ, будут оставаться такими же, потому что будут уменьшаться только стороны этих углов. Значит, если мы уменьшим отрезки AE; BF; BG; CH; CI; DJ; DK; AL на одну и ту же длину, то все свойства сохранятся. А это значит, что возле нового фигуры окружность, потому что фигура тоже можно описать. А значит, можно уменьшить так, чтобы будет подобна исходной. Значит, вокруг $ABCD$ можно описать окружность.